EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
FUNCIONES

Representación gráfica – Monotonía – Curvatura - Asíntotas

1. Dadas las funciones siguientes,

a) $f(x) = \dfrac{3x+6}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$ e) $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-2}$ f) $f(x) = \dfrac{3-x}{x-1}$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ h) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+3}$ i) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-4}$,

j) $f(x) = \dfrac{3-x}{2-x}$ k) $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-2}$ l) $f(x) = x^3 - 3x$

m) $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$ n) $f(x) = x^3 - 6x^2$ o) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

p) $f(x) = x^3 + 3x^2$ q) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ r) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

s) $f(x) = -x^3 + 3x$. t) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ u) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

v) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$ w) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$ x) $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes. Estudie su simetría, las asíntotas, la monotonía y los extremos relativos. Estudie su curvatura y los puntos de inflexión.
b) Represente gráficamente esta función.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Dibuje la gráfica de f y estudie su monotonía.
b) Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es –1.
c) Estudie la curvatura de la función.

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ represéntela gráficamente e indique sus extremos relativos.

4. Sean las funciones $f(x) = -4x + 6x^2$ y $g(x) = 2x - x^2$.
a) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Represéntelas gráficamente.
b) Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x) = f(x) - g(x)$

5. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

a) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
b) Represéntela gráficamente.

6. Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \; si \; x \leq 1 \\ x - 1 \; si \; x > 1 \end{cases}$
a) Determine la monotonía de f
b) Represente gráficamente esta función.

7. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.
b) Calcule sus asíntotas.
c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$.

8. Dadas la funciones $f(x)=\begin{cases} 2x-\dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 4 \\ 2x-8 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ -x^2+4x-2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.
b) Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.
c) Represente la gráfica de la función

9. Dadas las siguientes funciones, estudie la continuidad y derivabilidad. Halle las asíntotas y extremos relativos

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & si \quad x<-1 \\ -x^2+4 & si \quad -1<x<1 \\ \dfrac{x+2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{x}{4} & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 1<x\leq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & si \quad x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5 & si \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+10 & si \quad 2<x<5 \\ 4x-15 & si \quad x\geq 5 \end{cases}$

10. Dadas las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si } x\leq 2 \\ x^2-6x+11 & \text{si } x>2 \end{cases} \quad \text{y } g(x)=\begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x\leq 1 \\ 4x-4 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

a) Represéntela gráficamente.
b) Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule sus extremos.
c) ¿Existe algún punto donde la pendiente de la recta tangente a su gráfica sea cero? En caso afirmativo, determine cuál es.

11. Sea

$$f(t)=\begin{cases} -t^3+5t^2 & \text{si } 0\leq t<3 \\ -t^2+12t-9 & \text{si } 3\leq t\leq 5 \\ 2t+16 & \text{si } 5<t\leq 10 \end{cases}.$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en $t=3$ y $t=5$.
b) Razone si *f* posee algún punto de inflexión y calcúlelo, en caso afirmativo.

12. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & si \quad x\leq 4 \\ x^2-9x+21 & si \quad x>4 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) Represente gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

13. Sea la función $f(x)=\begin{cases} -4x-3 & si \quad x\le -1 \\ 2x^2-1 & si \quad -1<x<1 \\ \dfrac{k+2}{x} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en R y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.
b) Dibuje la gráfica de la función para $k = -1$.

14. Se considera la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x+6 & si \quad x\le 1 \\ -2x^2+8x-6 & si \quad x>1 \end{cases}$
a) Represente la gráfica de f.
b) Indique los extremos relativos de la función.

Aplicaciones de la recta tangente

15. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x=-1$

16. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$ en la abscisa $x = 1$

17. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{2x^2+5}{x}$ en el punto de abscisa 1.

18. Dada la función $g(x)=\frac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

19. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x)=1+L(2x-1)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

20. Calcule la ecuación de la recta tangente a $y=\dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=2$.

21. Obtenga la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3+3x^2$ en el punto de abscisa $x=-1$

22. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

23. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=x\cdot \mathrm{L}x$ en el punto de abscisa 1.

24. Para $a = 1$, $b = 1$ y $c = 0$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ en el punto de abscisa $x = -2$.

25. Obtenga las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 3x$ que tienen pendiente cero y diga cuáles son los puntos de tangencia.

26. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-4x+2$ en su punto de inflexión.

27. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{2}{x}+L\,x$ en el punto de abscisa $x=1$.

28. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en la abscisa $x = 3$.

29. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$?

30. Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$. Halle los puntos de la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a $y = -3x + 3$.

Problemas con datos

31. Halle los valores de a y b para que la función $g(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2).

32. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcule los coeficientes a y b y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

33. Sea la función $g(x) = x^3 + ax^2 + b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto (2, 5).

34. La gráfica de la derivada de una función f es la recta que pasa por los puntos (0, -3) y (4, 0). y Estudie la monotonía de la función

35. Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.

36. Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Calcule a y b para que su gráfica pase por el punto (0, –5) y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta $y = -4x$.

37. Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función g cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos (2, 0) y (3, 1).

38. Dada la función $f(x) = a(x-1)^2 + bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas (1, 2) y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$

39. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).

40. Sea la función $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 3).

41. Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Halle el valor de los coeficientes a, b y c, si se sabe que en el punto (0, 0) su gráfica posee un extremo relativo y que el punto (2, –16) es un punto de inflexión.

42. Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$. Halle a y b para que la función se anule en $x = 1$ y tenga un punto de inflexión en $x = \frac{-1}{2}$

43. Halle los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto $(-2, 3)$.

44. Sea $g(x) = 2x^2 - 8x + a$. Halle a para que el valor mínimo de g sea 3.

45. De una función f se sabe que la gráfica de su función derivada, $f\,'$, es la recta de ecuación $y = -2x + 4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función f, a la vista de la gráfica de la derivada.

46. Se considera la función $f(x) = ax^2 - bx + 4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 10).

47. De una función f se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$
a) Estudie la monotonía y la curvatura de f.
b) Sabiendo que la gráfica de f pasa por (0, 1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

48. Determine a y b en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + 5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto (2, 9).

49. Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, −3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

50. La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice (0, 2) que corta al eje de abscisas en los puntos (−3, 0) y (3, 0). A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

51. Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$

52. Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$ Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es −3.

53. Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x < 1 \\ L(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$

54. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & si \quad x < 1 \\ ax + b & si \quad x \geq 1 \end{cases}$
a) Calcule a y b, sabiendo que $f(2) = 7$ y que f es continua en $x = 1$.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$

Problemas de optimización

55. El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función
$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675, x \geq 0$$
donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
a) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
b) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?
c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.
d) Represente gráficamente la función B.

56. Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función $B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (t indica el tiempo, en años, $0 \leq t \leq 5$).
a) Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.
b) En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

57. El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \leq x \leq 20$.
a) Halle los extremos relativos de esta función.

b) Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.
c) Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

58. El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por

$$B(t)=\begin{cases}-t^2+7t \; si \; 0\leq t<5 \\ 10 \; si \; 5\leq t\leq 8\end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.
a) Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.
b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11.25 millones de euros.

59. El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por la función $f(t)=-4t^2+60t-15, \quad 1\leq t\leq 8$
a) ¿Cuál será el valor de las existencias para $t = 2$? ¿Y para $t = 4$?
b) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?
c) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

60. El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t , en años, viene dado por $f(t)=-t^2+12t-31, \quad 4\leq t\leq 7$
a) Represente la gráfica de la función f.
b) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

61. Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f:[0,45]\rightarrow R$ cuya expresión analítica es $f(t)=7.2t-0.16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.
a) Represente gráficamente esta función.
b) ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

62. El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilogramos de un artículo viene dado por la función $B(x) = -0.01x^2 + 3.6x - 180$.
a) Represente gráficamente esta función.
b) Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.
c) Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

63. Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra. Sea $f(x) = 2-\dfrac{4}{x+1}$, con $x\geq 0$, la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.
a) Represente la función f
b) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?
c) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿Y las pérdidas?

64. La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión $T(t)=40t-10t^2$ con $0\leq t\leq 4$.
a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.
b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en

algún otro instante?

65. El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases}-5x^2+40x-60 & si \quad 0\le x\le 6\\ \dfrac{5x}{2}-15 & si \quad 6<x\le 10\end{cases}$$

donde *x* representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
a) Represente la función *f* .
b) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.
c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?
d) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Derivadas

66. Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado) :

a) $f(x)=(x^3+1)\cdot e^{7x}$
b) $f(x)=3^x\cdot L(x)$
c) $f(x)=\dfrac{e^x}{7x^5-4}$
d) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-2}$
e) $f(x)=\dfrac{3}{(2x-5)^2}+L(1-x)$
f) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3+1}$
g) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x}+(5x-2)^3$
h) $f(x)=(x^2+2)\cdot L(x^2+2)$
i) $f(x)=3^{5x}+e^x$
j) $f(x)=(x+1)\cdot e^{2x+1}$.
k) $f(x)=(3x+1)^3\cdot L(x^2+1)$
l) $f(x)=(x^2+1)\cdot(x^5-6x)^6$
m) $f(x)=\dfrac{e^{5x}}{x^3-1}$
n) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$
o) $f(x)=4x\cdot \mathrm{L}(3x+1)$
p) $f(x)=(x^2-1)\cdot(x^3+2x)$
q) $f(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$
r) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2$.
s) $f(x)=e^{1-x}+L(x+2)$
t) $f(x)=(x^2-1)\cdot L\,x$.
u) $f(x)=2^{5x}$.
v) $f(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$.

67. Halle la función derivada de la función $f(x)=L\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.

68. Halle $f\,'(2), g'(4), h'(0), i'(3), j''(2)$ para las funciones definidas de la siguiente forma

$f(x)=x^2+\dfrac{16}{x^2}$; $g(x)=(x^2+9)^3$; $h(x)=L(x^2+1)$; $i(x)=2x\cdot e^{3x-1}$; $j(x)=\frac{1}{x}-x$

Continuidad y derivabilidad

69. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\frac{2x-3}{x+1} & si \quad x\le 0\\ x^2+2x-3 & si \quad x>0\end{cases}$
a) Estudie su derivabilidad en $x = 0$.
b) Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

70. Sea la función *f* definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x-1} & si \quad x<2\\ 2x^2-10x & si \quad x\ge 2\end{cases}$
a) Halle el dominio de *f*.
b) Estudie la derivabilidad de *f* en $x = 2$.
c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x=0.

71. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{x+1} & si \quad x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a para que la función f sea continua en x = 0. Para ese valor de a , ¿es f derivable en x =0?

b) Para a = 0, calcule

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ y \ \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

72. a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + a & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + bx + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

73. Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) ¿Es f continua en x = 0? ¿Es continua en su dominio?

b) ¿Es f derivable en x = 0? ¿Es derivable en su dominio?

c) Estudie la monotonía de f .

74. Sea la función $f: R \ \rightarrow R$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + mx + 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Calcule m para que la función sea continua en x = 1.

b) Para ese valor de m, ¿es derivable la función en x = 1?

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 0.

75. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} \ si \ x \leq 0 \\ x^2 + x \ si \ x > 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f .

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

76. a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b, & si \ x \leq 2 \\ a(x-3)^2 + 3, & si \ x > 2 \end{cases}$

Halle a y b para que la función sea continua y derivable en x = 2.