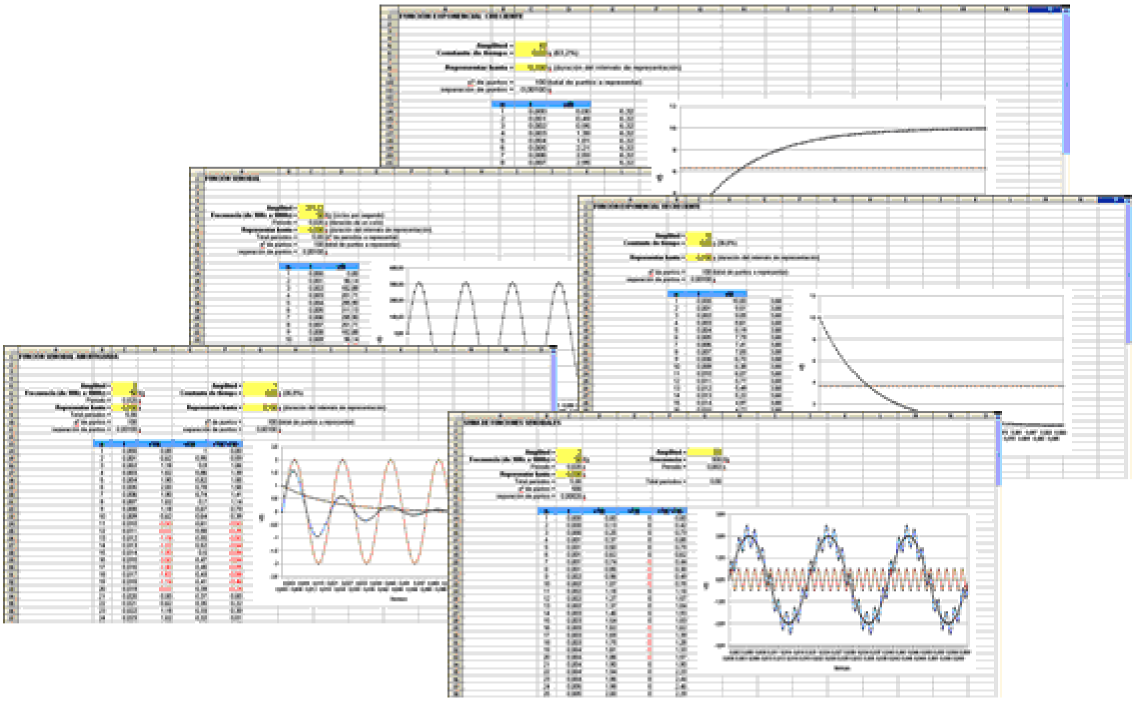


Representación y aplicaciones de las funciones tipo

Actividad Interdisciplinar
Córdoba, junio de 2009

1. Introducción

En este trabajo vamos a ver la forma de representar funciones matemáticas con una herramienta informática de gran utilidad. Son las denominadas "***hojas de cálculo***". Utilizando el programa "***Calc***", integrado en **OpenOffice**.

Haremos el trabajo paso a paso con una de las funciones más representativas y de mayor utilidad. Posteriormente se propondrán diferentes funciones para repetir el proceso con cada una de ellas. Finalmente se relacionará cada función con diferentes situaciones reales que se manifiestan obedeciendo al comportamiento que tienen estas funciones matemáticas.

2. Función seno

Existe una expresión matemática que utiliza la función trigonométrica seno que denominaremos función senoidal. Los valores de esta función varían de positivos a negativos, es decir cambian de signo de forma alternativa de ahí que se le llame también función alterna. También se dice que los valores van oscilando en torno al valor cero alcanzando un valor máximo positivo y un máximo negativo, denominados amplitud positiva y negativa. La variable de la función es el tiempo, de modo que dando valores a esta variable tendremos el valor que toma la función en ese instante de tiempo. Nuestro objetivo es dar sucesivos valores a la función a lo largo del tiempo (entre un instante de inicio y un instante final) y calcular el valor que toma la función para cada instante. Con estos valores formaremos una tabla que luego representaremos de forma gráfica, pudiendo observar el comportamiento de la función y comprenderla con mayor facilidad.

La expresión matemática de la que estamos hablando es la siguiente:

$$v(t) = V \cdot sen(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Valor instantáneo

Amplitud ó Valor máximo

Frecuencia

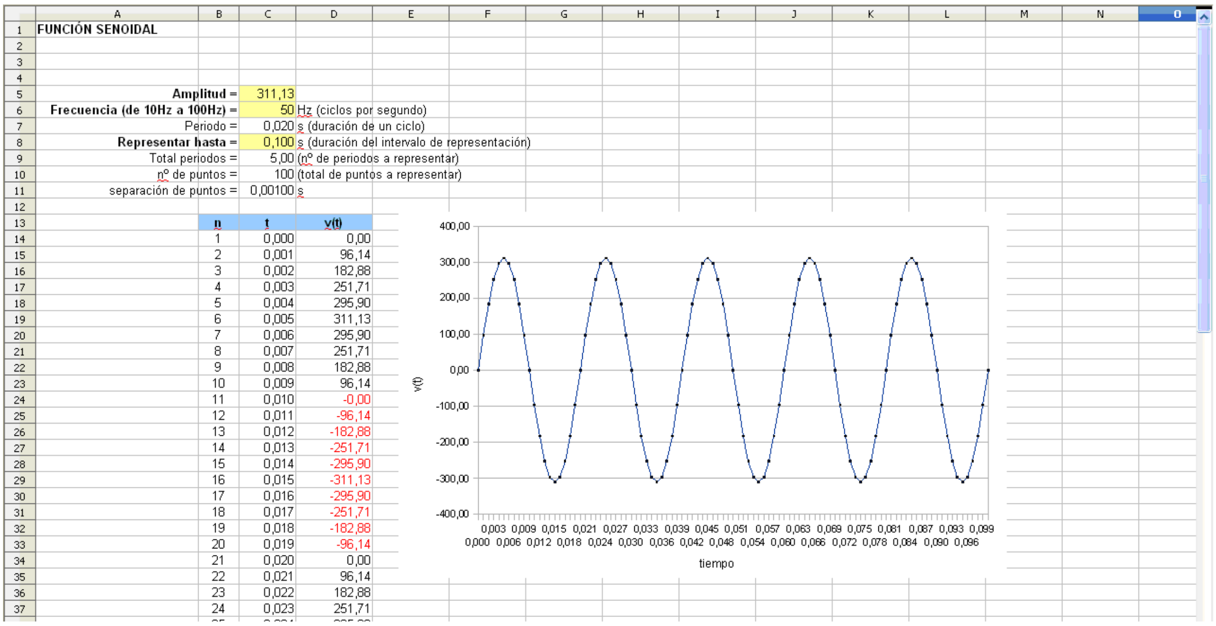
Instante de tiempo Variable de la función

La función v depende del tiempo y estará caracterizada por una amplitud y una frecuencia. Esta última determina el número de veces que la función seno oscila por segundo, valor que se mide en Herzios (Hz), también llamado ciclos por segundo.

2.1. Preparación de parámetros

Iniciaremos la hoja de cálculo preparando los parámetros que luego necesitará la función. Estos parámetros son las constantes que aparecen en dicha función.

- En primer lugar utilizaremos una celda para dar el valor de la amplitud, que podremos cambiar modificando el valor máximo de la onda senoidal.
- También utilizaremos otra celda para fijar la frecuencia de la onda en Hz ó ciclos por segundo.
- Por último es necesario definir los puntos que formarán la curva a representar y por tanto el valor del tiempo para cada uno de esos puntos. Fijaremos una celda para indicar el número total de puntos que representaremos, lo que debe de coincidir con el número de filas de la tabla de datos que formaremos. Usaremos 100 puntos para la curva. Nos queda determinar hasta donde llegará la representación, es decir, el instante de tiempo del último punto. Una vez fijado lo dividimos por el número de puntos y tendremos la separación en el tiempo de cada punto de la curva, llamado también incremento de t.



	A	B	C	D
1	FUNCIÓN SENOIDAL			
2				
3				
4				
5	**Amplitud =**		311,13	
6	**Frecuencia (de 10Hz a 100Hz) =**		50	Hz (ciclos por segundo)
7	Periodo =		0,020	s (duración de un ciclo)
8	**Representar hasta =**		0,100	s (duración del intervalo de representación)
9	Total periodos =		5,00	(nº de periodos a representar)
10	nº de puntos =		100	(total de puntos a representar)
11	separación de puntos =		0,00100	s
12				
13		**n**	**t**	**v(t)**
14		1	0,000	0,00
15		2	0,001	96,14
16		3	0,002	182,88
17		4	0,003	251,71
18		5	0,004	295,90
19		6	0,005	311,13
20		7	0,006	295,90
21		8	0,007	251,71
22		9	0,008	182,88
23		10	0,009	96,14
24		11	0,010	-0,00
25		12	0,011	-96,14
26		13	0,012	-182,88
27		14	0,013	-251,71
28		15	0,014	-295,90
29		16	0,015	-311,13
30		17	0,016	-295,90
31		18	0,017	-251,71
32		19	0,018	-182,88
33		20	0,019	-96,14
34		21	0,020	0,00
35		22	0,021	96,14
36		23	0,022	182,88
37		24	0,023	251,71

Figura 1. *Preparación de parámetros, formación de la tabla y representación gráfica*

2.2. Formación de la tabla

La representación gráfica de la función se obtiene a partir de los datos calculados de todos los puntos a representar. Estos datos los prepararemos en forma de tabla utilizando las celdas de la hoja de cálculo. La tabla tendrá las siguientes columnas:

- Haremos una columna que indicará el número de orden del punto calculado. Consiste en un número entero que se incrementa de 1 en 1. En la primera celda de esta columna introducimos el número 1 y en la segunda el número 2. Seleccionando estas dos celdas aparece un pequeño cuadrado en la esquina inferior derecha de la selección. Cogiendo con el ratón este cuadrado lo podemos desplazar en vertical hacia abajo hasta llegar a la posición número 100, completando de forma rápida 100 celdas, con una serie creciente desde 1 hasta 100.

- La segunda columna se utilizará para el valor del instante de tiempo que tendrá cada uno de los 100 puntos. Empezaremos con el valor 0 para el punto número 1. El punto número 2 tomará el valor del punto anterior incrementado por la separación temporal calculada anteriormente. Esto se consigue introduciendo en la celda del punto 2 la fórmula:

  =C14+$C$11

  Donde C14 son las coordenadas de la celda del punto anterior y C11 de la celda donde hemos calculamos la separación en el tiempo de dos puntos consecutivos. Esta formula debemos de extenderla a todos los puntos de la tabla, de la misma forma que se hizo en la primera columna. Cada vez que bajamos una fila se incrementan las coordenadas de las celdas que forman parte de la fórmula. Esto es correcto para la C14 pero C11 no debe cambiar, es una celda fija para todas las filas de la tabla. Para indicar que una celda es fija se añade el signo $ delante de la letra y del número de las coordenadas de la celda fija.

- En la tercera columna es donde utilizaremos la ecuación que nos permitirá calcular el valor que toma la función para cada uno de los puntos. La ecuación para el primer punto será:

  =$C$5*sen(2*pi()*$C$6*C14)

  Observar como la amplitud y la frecuencia están en celdas fijas, C5 y C6 respectivamente. Mientras que el tiempo, en C14, es diferente para cada punto. El contenido de esta celda lo debemos extender hasta el último punto de la tabla.

2.3. Representación gráfica de la función

Para la representación gráfica de la función a partir de la tabla de datos ya calculada, seguiremos los siguientes pasos:

1. Seleccionar la tabla de datos completa incluyendo las etiquetas de las columnas del tiempo t y de la función v(t) y pulsar el botón del “Asistente de gráficas”. Se abrirá la ventana que se muestra en la figura 2.

2. Elegir el tipo de gráfico “XY (dispersión)”, en la modalidad de “Puntos y líneas”.

3. Pulsar el botón “Siguiente” y comprobar que el rango de datos abarca toda la tabla y que están marcadas las opciones: “Serie de datos en columnas” y “Primera fila como etiqueta”. Figura 3.

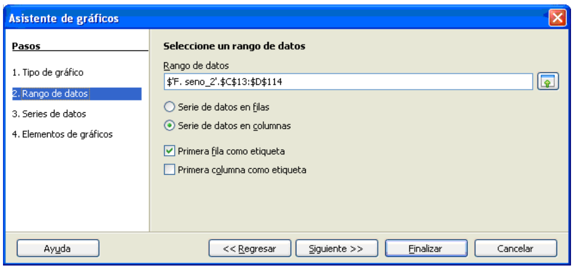
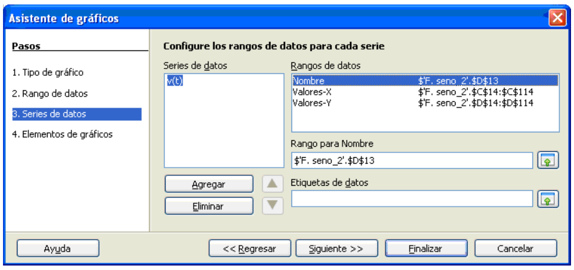


Figura 2. ***Figura 3.***

4. Pulsar el botón “Siguiente” y comprobar en la ventana que aparece (figura 4) que la serie de datos está correctamente definida



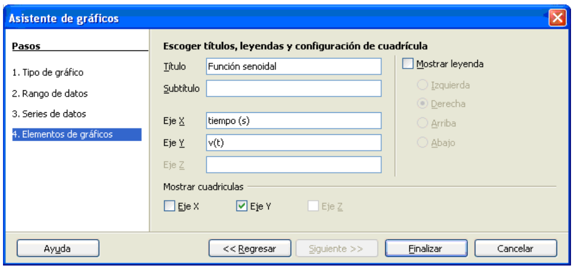
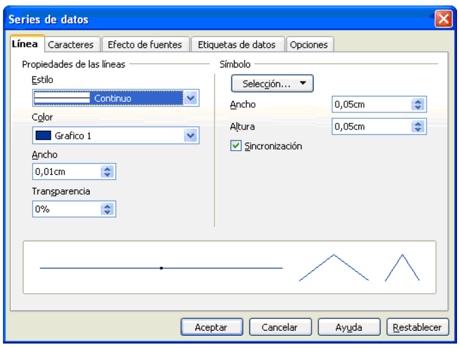


Figura 4. ***Figura 5.***

5. Pulsar de nuevo el botón “Siguiente” y poner los elementos del gráfico que se deseen, como: título, subtítulo, etiqueta del eje X, etiqueta del eje Y, mostrar cuadrícula ó mostrar leyenda. Figura 5. Por último pulsar el botón “Finalizar” y el gráfico estará terminado. Figura 7.



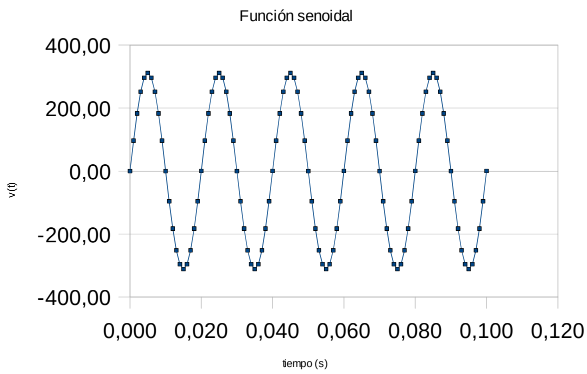


Figura 6. ***Figura 7.***

Un gráfico está formado por diferentes elementos, los cuales tienen propiedades que podremos modificar, lo que nos permitirá personalizar el gráfico mediante la elección de colores, y formas diferentes. Por ejemplo, haciendo doble clic sobre la línea de la función se abre la ventana de la figura 6 donde podremos modificar el estilo, el color, el ancho, ect.

3. Otras funciones típicas

A continuación se proponen algunas funciones para que sean representadas generando previamente su tabla de datos.

3.1. Función exponencial decreciente

Esta función parte de un valor inicial K_1, llamado valor máximo ó amplitud y decrece buscando el cero en el infinito. La rapidez con la que decrece la función viene marcada por K_2, llamada también constante de tiempo. Esta constante es el tiempo necesario para que la función se reduzca al 36,8% de su valor inicial.

$$v(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{K_2}}$$

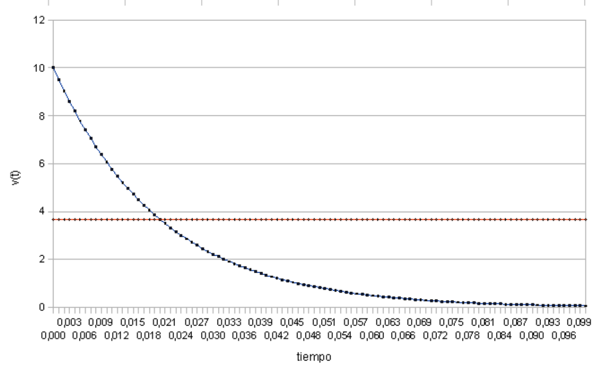
Instante de tiempo
Variable de la función

Valor instantáneo

Amplitud ó
Valor máximo

Constante de
tiempo

	A	B	C	D	E
1	FUNCIÓN EXPONENCIAL DECRECIENTE				
2					
3					
4					
5	**Amplitud =**		10		
6	**Constante de tiempo =**		0,02	s (36,8%)	
7					
8	**Representar hasta =**		0,100	s (duración del intervalo de representación)	
9					
10	nº de puntos =		100	(total de puntos a representar)	
11	separación de puntos =		0,00100	s	
12					
13		**n**	**t**	**v(t)**	
14		1	0,000	10,00	3,68
15		2	0,001	9,51	3,68
16		3	0,002	9,05	3,68
17		4	0,003	8,61	3,68
18		5	0,004	8,19	3,68
19		6	0,005	7,79	3,68
20		7	0,006	7,41	3,68
21		8	0,007	7,05	3,68
22		9	0,008	6,70	3,68
23		10	0,009	6,38	3,68
24		11	0,010	6,07	3,68
25		12	0,011	5,77	3,68
26		13	0,012	5,49	3,68
27		14	0,013	5,22	3,68
28		15	0,014	4,97	3,68
29		16	0,015	4,72	3,68
30		17	0,016	4,49	3,68
31		18	0,017	4,27	3,68
32		19	0,018	4,07	3,68
33		20	0,019	3,87	3,68
34		21	0,020	3,68	3,68
35		22	0,021	3,50	3,68
36		23	0,022	3,33	3,68
37		24	0,023	3,17	3,68
38		25	0,024	3,01	3,68



3.2. Función exponencial creciente

Esta función es contraria a la anterior, parte de cero y alcanza el valor final K_1, llamado valor máximo ó amplitud en el infinito. La rapidez con la que crece la función viene marcada por K_2, llamada también constante de tiempo. Esta constante es el tiempo necesario para que la función alcance el 63,2% de su valor final.

$$v(t) = K_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{K_2}} \right)$$

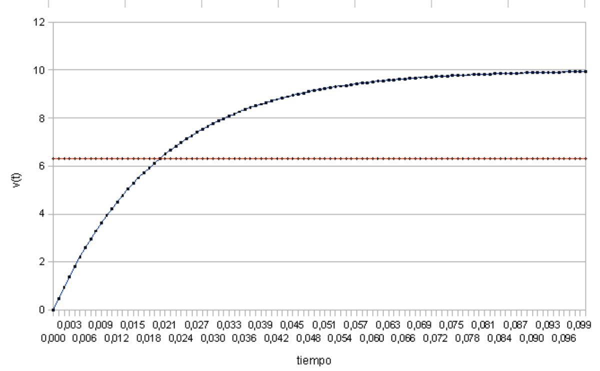
Valor instantáneo

Amplitud ó
Valor máximo

Constante de
tiempo

Instante de tiempo
Variable de la función

	A	B	C	D	E
1	FUNCIÓN EXPONENCIAL CRECIENTE				
2					
3					
4					
5	**Amplitud =**		10		
6	**Constante de tiempo =**		0,02	s (63,2%)	
7					
8	**Representar hasta =**		0,100	s (duración del intervalo de representación)	
9					
10	nº de puntos =		100	(total de puntos a representar)	
11	separación de puntos =		0,00100	s	
12					
13		**n**	**t**	**v(t)**	
14		1	0,000	0,00	6,32
15		2	0,001	0,49	6,32
16		3	0,002	0,95	6,32
17		4	0,003	1,39	6,32
18		5	0,004	1,81	6,32
19		6	0,005	2,21	6,32
20		7	0,006	2,59	6,32
21		8	0,007	2,95	6,32
22		9	0,008	3,30	6,32
23		10	0,009	3,62	6,32
24		11	0,010	3,93	6,32
25		12	0,011	4,23	6,32
26		13	0,012	4,51	6,32
27		14	0,013	4,78	6,32
28		15	0,014	5,03	6,32
29		16	0,015	5,28	6,32
30		17	0,016	5,51	6,32
31		18	0,017	5,73	6,32
32		19	0,018	5,93	6,32
33		20	0,019	6,13	6,32
34		21	0,020	6,32	6,32
35		22	0,021	6,50	6,32
36		23	0,022	6,67	6,32
37		24	0,023	6,83	6,32



3.3. Producto de una función seno por una exponencial decreciente

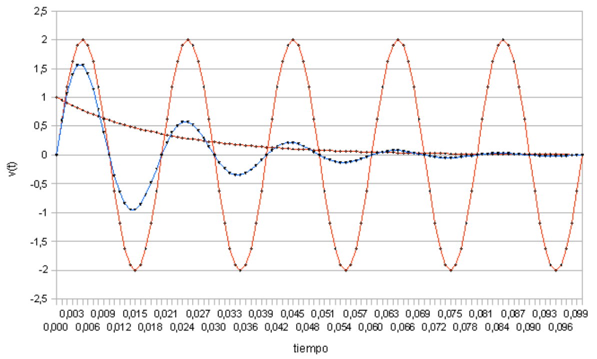
Cuando se multiplica una función senoidal por una exponencial decreciente, el resultado es que la función senoidal termina anulándose. Progresivamente las amplitudes de los sucesivos picos de la curva van decreciendo hasta hacerse cero.

$$v(t) = V \cdot sen(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot K_1 \cdot e^{-\frac{t}{K_2}}$$

FUNCIÓN SENOIDAL AMORTIGUADA

Amplitud =	2		**Amplitud =**	1	
Frecuencia (de 10Hz a 100Hz) =	50	Hz	**Constante de tiempo =**	0,02	s (36,8%)
Periodo =	0,020	s			
Representar hasta =	0,100	s	**Representar hasta =**	0,100	s (duración del intervalo de representación)
Total periodos =	5,00				
nº de puntos =	100		nº de puntos =	100	(total de puntos a representar)
separación de puntos =	0,00100	s	separación de puntos =	0,00100	s

n	t	v1(t)	v2(t)	v1(t)*v2(t)
1	0,000	0,00	1	0,00
2	0,001	0,62	0,95	0,59
3	0,002	1,18	0,9	1,06
4	0,003	1,62	0,86	1,39
5	0,004	1,90	0,82	1,56
6	0,005	2,00	0,78	1,56
7	0,006	1,90	0,74	1,41
8	0,007	1,62	0,7	1,14
9	0,008	1,18	0,67	0,79
10	0,009	0,62	0,64	0,39
11	0,010	-0,00	0,61	-0,00
12	0,011	-0,62	0,58	-0,36
13	0,012	-1,18	0,55	-0,65
14	0,013	-1,62	0,52	-0,84
15	0,014	-1,90	0,5	-0,94
16	0,015	-2,00	0,47	-0,94
17	0,016	-1,90	0,45	-0,85
18	0,017	-1,62	0,43	-0,69
19	0,018	-1,18	0,41	-0,48
20	0,019	-0,62	0,39	-0,24
21	0,020	0,00	0,37	0,00
22	0,021	0,62	0,35	0,22
23	0,022	1,18	0,33	0,39
24	0,023	1,62	0,32	0,51



3.4. Suma de dos funciones senoidales

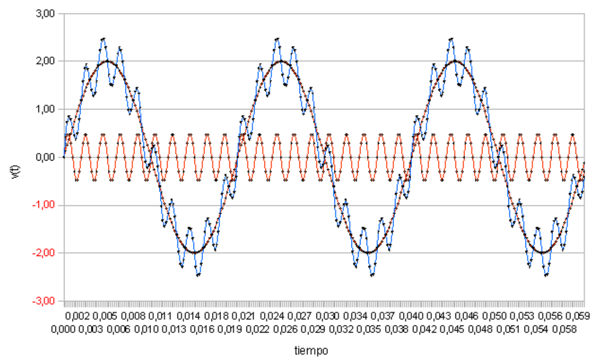
Ya hemos visto la constitución y características de una función senoidal que son su amplitud y su frecuencia. Si intentamos sumar dos funciones de este tipo de diferente frecuencia, el resultado es una senoidal, de la de menor frecuencia cuya línea está ondulada a la de mayor frecuencia.

$$v(t) = V_1 \cdot sen(2\pi \cdot f_1 \cdot t) \cdot V_2 \cdot sen(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

SUMA DE FUNCIONES SENOIDALES

Amplitud =	2		**Amplitud =**	0,5	
Frecuencia (de 10Hz a 100Hz) =	50	Hz	**Frecuencia =**	500	Hz
Periodo =	0,020	s	Periodo =	0,002	s
Representar hasta =	0,100	s			
Total periodos =	5,00		Total periodos =	0,00	
nº de puntos =	500				
separación de puntos =	0,00020	s			

n	t	v1(t)	v2(t)	v1(t)*v2(t)
1	0,000	0,00	0,00	0,00
2	0,000	0,13	0,29	0,42
3	0,000	0,25	0,48	0,73
4	0,001	0,37	0,48	0,85
5	0,001	0,50	0,29	0,79
6	0,001	0,62	0,00	0,62
7	0,001	0,74	-0,29	0,44
8	0,001	0,85	-0,48	0,38
9	0,002	0,96	-0,48	0,49
10	0,002	1,07	-0,29	0,78
11	0,002	1,18	0,00	1,18
12	0,002	1,27	0,29	1,57
13	0,002	1,37	0,48	1,84
14	0,003	1,46	0,48	1,93
15	0,003	1,54	0,29	1,83
16	0,003	1,62	-0,00	1,62
17	0,003	1,69	-0,29	1,39
18	0,003	1,75	-0,48	1,28
19	0,004	1,81	-0,48	1,33
20	0,004	1,86	-0,29	1,57
21	0,004	1,90	0,00	1,90
22	0,004	1,94	0,29	2,23
23	0,004	1,96	0,48	2,44
24	0,005	1,98	0,48	2,46

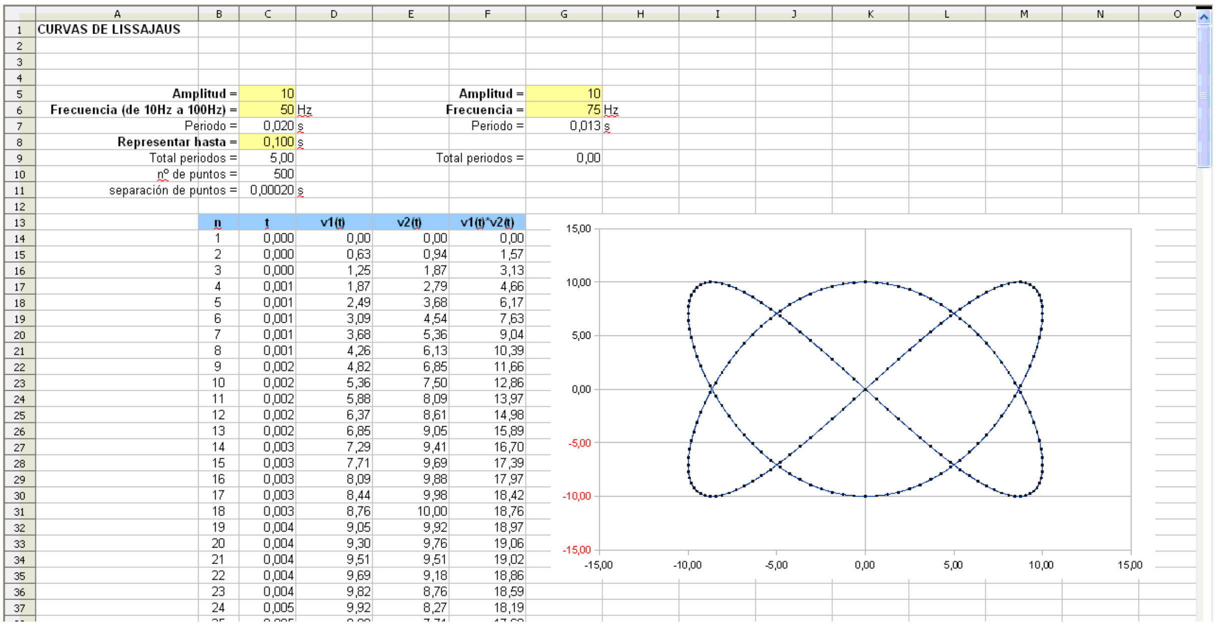


Utilizar internet para buscar los siguientes términos: “Amplitud Modulada”.

3.5. Curvas de Lissajous

En este caso utilizaremos dos funciones senoidales que valoraremos a lo largo del tiempo, pero en vez de representarlas con respecto al tiempo, la representación se hará una con respecto a otra. Es decir, tomaremos el valor que toma v2 frente al que toma v1 en el mismo instante de tiempo. El resultado son diferentes figuras en función de la relación entre las frecuencias de ambas funciones. A estas figuras se les llama curvas de Lissajous.

$$v_1(t) = V_1 \cdot sen(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$$
$$v_2(t) = V_2 \cdot sen(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$



CURVAS DE LISSAJAUS

Amplitud =	10		Amplitud =	10
Frecuencia (de 10Hz a 100Hz) =	50 Hz		Frecuencia =	75 Hz
Periodo =	0,020 s		Periodo =	0,013 s
Representar hasta =	0,100 s			
Total periodos =	5,00		Total periodos =	0,00
nº de puntos =	500			
separación de puntos =	0,00020 s			

n	t	v1(t)	v2(t)	v1(t)*v2(t)
1	0,000	0,00	0,00	0,00
2	0,000	0,63	0,94	1,57
3	0,000	1,25	1,87	3,13
4	0,001	1,87	2,79	4,66
5	0,001	2,49	3,68	6,17
6	0,001	3,09	4,54	7,63
7	0,001	3,68	5,36	9,04
8	0,001	4,26	6,13	10,39
9	0,002	4,82	6,85	11,66
10	0,002	5,36	7,50	12,86
11	0,002	5,88	8,09	13,97
12	0,002	6,37	8,61	14,98
13	0,002	6,85	9,05	15,89
14	0,003	7,29	9,41	16,70
15	0,003	7,71	9,69	17,39
16	0,003	8,09	9,88	17,97
17	0,003	8,44	9,98	18,42
18	0,003	8,76	10,00	18,76
19	0,004	9,05	9,92	18,97
20	0,004	9,30	9,76	19,06
21	0,004	9,51	9,51	19,02
22	0,004	9,69	9,18	18,86
23	0,004	9,82	8,76	18,59
24	0,005	9,92	8,27	18,19

Utilizar Internet para buscar los siguientes términos: “Curva de Lissajous”.